数理解析研究所講究録
90巻 1970年 99-109

高次系の準最適化

東京大学工学部　茅 陽一

I. 序論

高次のダイナミカルシステムの最適化を行なおうとすると、次の二点が大きな問題として浮かびあがってくる。

1) 高次のモデルは、パラメータの数が多く、パラメータ決定に関する計算量がきわめて大きくなること。又、パラメータの最適値の探索もそれ自体難しい問題となること（多峰性の可能性など）。

2) 高次のモデルがたとえもとめられても、それを用いての制御方策の決定に大きな計算量を要すること。

これらの二問題を解決する一つの方策は、システムの低次近似モデルを作り、これを用い制御方策を定めることである。これは最適性の犠牲により、計算量を低減するという準最適化の考え方であって、分解原理にもとづく多重レベル計算法とは対照的である。

準最適化の従来からの研究は、大別すると次の二つの型になる。ただ、この場合、眼はもっぱら上述の2)にそそがれ、

1)は考えていない。すなわち，前提としてシステムの正確な高次モデルが与えられているとしている。

A. 原システムの固有値の小さなものだけを保存したモデルをあらたに作り，これより制御方策を定める。

(Nicholson[1], Aoki[2] など)

B. システムを，応答の速い部分 S_f，おそい部分 S_s にわけ，S_s で定めた制御方策を S_f の情報で補正する。

(Kokotović-Sannuti[3]~[5], 椹木[7], 石谷[6] など)

Bの手法の典形として，Kokotovićの手法を簡単に説明しておく。この場合，システムは次の形に分割できるとする。

システム
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z, u, \lambda, t) & (1) \\ \lambda \dot{z} = g(x, z, u, \lambda, t) & (2) \end{cases}$$

u；制御入力，　λ：小さな正実数

制御基準
$$J = x'(t_f) F x(t_f) + z'(t_f) G z(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x, z, u, \lambda, t)\, dt \rightarrow \min \qquad (3)$$

初期条件　$x(t_0)$, $z(t_0)$: given

終端条件　$x(t_f)$, $z(t_f)$: not given

Kokotovićは，この場合の準最適制御方策を(4)のように定めている。

$$u = u_0^* + \left(\frac{\partial u^*}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \cdot \lambda \qquad (4)$$

ただし　u^*：真の最適な u

　　u_0^*；$\lambda=0$ としたとき（低次近似）の最適な u

$u_\lambda^* = (\partial u^*/\partial \lambda)_{\lambda=0}$ は，u^* を求めなくとも，u_0^* などを用いて比較的容易に計算できる。（後述）

従来，とくにBの方式の欠点は次の通りである。

1° システムの正確な高次モデルがあらかじめ与えられている必要のあること。

2° システムが S_s, S_f の二つのシステムに区分しうること。したがって，システム内での応答の速さのちがいが判然としないときは取扱いにくくなる。

3° 基本モデルとして S_s をそのまま用いているが，これはこの次数の範囲での最良近似モデルになるとは限らない。

以上の点を考慮して，筆者は新たに次の方式を提案する。これは，システムを適当に低い次数のモデルで近似し，次数をあげても最適性があまり変らないような次数のところで近似をとめるという考え方であって，モデリングの問題と制御の問題を連結したものである。

ステップ1　低次モデルの次数 n を定め、この次数の範囲で制御基準を最小とするようモデルパラメータを定める。このときの
$$u = u_n^*$$

↓

ステップ2　高次パラメータ λ に関する制御基準のグラディエント $J_{\lambda 0}^* = \left(\frac{\partial J^*}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0}$ を求める。

J^*；$n+1$ 次モデルに対する最適な J

↓

ステップ3　$|J_{\lambda 0}^*|$ が与えた M より小さければ、
$u^* = u_n^*$　とする。
そうでなければ、$n \to n+1$ とし 1 に戻る。

II. ステップ1。近似最適モデルと制御方策の決定.

以下、話を簡単にするため問題を次のように単純化する。

システム；$W \subset R^N$，線形オートノマス

モデル；$X \subset R^n$，$n < N$，線形オートノマス

モデルパラメータ；$\{a_i\}$ 及び λ，$X(0)$

すなわち

システム $\dot{\mathbb{W}} = A_s \mathbb{W} + \mathbb{B}_s u$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & & \cdot & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & & \alpha_N \end{pmatrix} \mathbb{W} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} u \qquad (5)$$

モデル

通常の低次モデル $\dot{\mathbb{X}} = A\mathbb{X} + \mathbb{B} u$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & & \cdot & 1 \\ a_1 & \cdots & & a_n \end{pmatrix} \mathbb{X} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u \qquad (6)$$

一次高次のモデル $\begin{pmatrix} \dot{\mathbb{X}}_n \\ \lambda \dot{\mathbb{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & & & 1 \\ a_1 & & & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{X}_n \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (7)$

（$\lambda = 0$ で (7) → (6) となる）

出力　システム　$y_s = w_1$　　(8)

　　　モデル　$y = x_1$　　(9)

制御基準　もっと一般化も可能であるが、ここでは

$$J = \int_0^\infty [Q(y_s - r(t))^2 + q u^2] \, dt \longrightarrow \min_u \qquad (10)$$

$r(t)$：一応一定とする。

モデルのパラメータ $\{a_i, b_i\}$，$\mathbb{X}(0)$ を調整し $J \to \min$ とするのは一般最適値探索問題で，J の各パラメータに関する傾斜が与えられれば、最大傾斜法・共役傾斜法などいろいろ考えられる。そこで，問題は J の傾斜であって，これを求める方策の詳細は略するが、一例として a_i に対する傾斜の計算を

次に示す。

<u>a_i に対する J の傾斜</u>

1) (10) →

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 2\int_0^\infty [\, Q(y_s - r)\, y_{sa_i} + q\, u\, u_{a_i} \,]\, dt \qquad (11)$$

ただし $\quad u_{a_i} = \dfrac{\partial u}{\partial a_i}, \quad y_{sa_i} = \dfrac{\partial y_s}{\partial a_i} \qquad (12)$

2) y_{sa_i}

(5) → $\dot{\mathbb{W}}_{a_i} = A_s \mathbb{W}_{a_i} + \mathbb{B}_s u_{a_i} \qquad (13)$

$\mathbb{W}_{a_i}(0) = 0 \qquad (14)$

(8) → $y_{sa_i} = w_{1a_i} \qquad (15)$

すなわち、y_{sa_i} は、初期条件零のシステムに u_{a_i} を加えたときの出力となる。

3) u_{a_i}

モデル $\mathbb{X}$ に対する最適な u は、変分法より

$$u = -\frac{1}{q}\mathbb{B}'K\mathbb{X} - \frac{1}{2q}\mathbb{B}'\mathbb{L} \qquad (16)$$

ただし $\quad K:\ 0 = -KA - A'K + \frac{1}{q}K\mathbb{B}\mathbb{B}'K - \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (17)$

$\mathbb{L}:\ 0 = -(A' - \frac{1}{q}K\mathbb{B}\mathbb{B}')\mathbb{L} + 2\begin{bmatrix} Qr \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (18)$

したがって、

$$u_{a_i} = -\frac{1}{q}\mathbb{B}'K_{a_i}\mathbb{X} - \frac{1}{q}\mathbb{B}'K\mathbb{X}_{a_i} - \frac{1}{2q}\mathbb{B}'\mathbb{L}_{a_i} \qquad (20)$$

ただし K_{a_i}; $-K_{a_i}A - A'K_{a_i} + \frac{1}{q}K_{a_i}\mathbb{B}\mathbb{B}'K - \frac{1}{q}K\mathbb{B}\mathbb{B}'K_{a_i} + \begin{array}{c}\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix} k_{1n} \\ \vdots \\ k_{nn} \end{matrix} & 0 \end{array}\right] \\ i\text{列} \end{array}$

$$+ \left[\begin{matrix} 0 \\ k_{1n} \cdots k_{nn} \\ 0 \end{matrix}\right] \leftarrow i\text{行} = 0 \qquad (21)$$

$$\mathbb{L}_{a_i}; \quad -A'\mathbb{L}_{a_i} - \begin{pmatrix} 0 \\ l_i \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{行} + \frac{1}{q}K_{a_i}\mathbb{B}\mathbb{B}'\mathbb{L} + \frac{1}{q}K\mathbb{B}\mathbb{B}'\mathbb{L}_{a_i} = 0 \qquad (22)$$

K_{a_i}, $\mathbb{L}_{a_i}$ はいずれも一次連立方程式の解となる。

また $\mathbb{X}_{a_i}$ は (6) より

$$\dot{\mathbb{X}}_{a_i} = A\mathbb{X}_{a_i} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_i \end{pmatrix} + \mathbb{B}u_{a_i} \qquad (23)$$

$$\mathbb{X}_{a_i}(0) = 0 \qquad (24)$$

(20) と (23) を組合せれば、u_{a_i} が求められる。

III. ステップ2。λに対する判定基準のグラディエント。

λは、λ=0 でシステムの次数を縮退させるパラメータであり、J のλに対するグラディエントの計算は $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $\mathbb{X}(0)$ に対するそれに比しやや面倒になる。

この計算は、基本的には Kokotović により開発されたものであるので、ここでは結果を簡単に示す。

この場合，目的となるグラディエントは，$u, \mathbb{X}_s$ が $\lambda=0$ で λ に関し微分可能であれば次式から計算できる。

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \lambda}\right)_0 = 2\int_0^\infty [Q(y_{s0}-r)\,y_{s\lambda 0} + q u_0 u_{\lambda 0}]\,dt \qquad (25)$$

ここで，$y_{s\lambda 0} = \left(\frac{\partial y_s}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0}$，$\left(\frac{\partial J}{\partial \lambda}\right)_0 = \left(\frac{\partial J}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0}$

$$u_{\lambda 0} = \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0}, \quad u_0 = (u)_{\lambda=0} \qquad (26)$$

したがって，y_{s0}，$y_{s\lambda 0}$，u_0，$u_{\lambda 0}$ が与えられればよい。

・<u>u_0 及び y_{s0}</u>

これは(6)のモデルを用いたときの最適な u とそれに対するシステムの応答であるから，直ちに計算できる。((16)参照)

・<u>$y_{s\lambda 0}$</u>　これも，前節の説明からわかるように，$u_{\lambda 0}$ に対するシステムの応答（ただしすべての初期条件零）である。

したがって，問題は $u_{\lambda 0}$ の決定に帰着する。

・<u>$u_{\lambda 0}$</u>　(7)に対する最適な u は，

$$u = -\frac{1}{q}\mathbb{B}_h \mathrm{K}_h \mathbb{V} - \frac{1}{2q}\mathbb{B}_h' \mathbb{L}_h \qquad (27)$$

ただし，$\mathbb{B}_h = \begin{pmatrix} \mathbb{B} \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mathbb{X}_h \\ z \end{pmatrix}$ $\qquad (28)$

K_h，$\mathbb{L}_h$ は (7)のモデルに対する $\mathrm{K}, \mathbb{L}$（(17)(18)参照）である。

$\mathrm{K}_h, \mathbb{L}_h, \mathbb{V}$ は，いずれも λ の関数で $\lambda=0$ で微分可能。

(27)より，これを λ で微分して $u_{\lambda 0}$ が求められる。結果の

みを記すと

$$u_{\lambda 0} = -\frac{1}{2q}\mathbb{B}'\mathbb{P}_\lambda - \frac{1}{q}\mathbb{B}'K\mathbb{f}\left(\sum a_i x_i\right) - \frac{1}{q}\mathbb{B}'M_\lambda \mathbb{x} - \frac{1}{q}\mathbb{B}'K\mathbb{x}_{h\lambda 0} \qquad (29)$$

ただし，K：(17)のK，$\mathbb{f}' = (\overbrace{0 \cdots 0\ 1}^{n\,列})$

$$\mathbb{P}_\lambda:\ -\left(A+\frac{1}{q}\mathbb{B}\mathbb{B}'K\right)\mathbb{P}_\lambda - \frac{1}{q}\left(\mathbb{a}\mathbb{f}'K + M_\lambda\right)\mathbb{B}\mathbb{B}'\mathbb{L} = 0 \qquad (30)$$

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\quad \mathbb{L}：(18)のL$$

$$\begin{aligned} M_\lambda:\ &\left(-A' + \frac{1}{q}K\mathbb{B}\mathbb{B}'\right)M_\lambda + M_\lambda\left(-A + \frac{1}{q}\mathbb{B}\mathbb{B}'K\right) \\ &- \left(F_0' - \frac{1}{q}K\mathbb{B}\mathbb{B}'\right)K\mathbb{f}\mathbb{a}' + \mathbb{a}\mathbb{f}'K\left(F_0 - \frac{1}{q}\mathbb{B}\mathbb{B}'K\right) \\ &- \mathbb{f}'K\mathbb{f}\mathbb{a}\mathbb{a}' - \mathbb{a}\mathbb{a}'\mathbb{f}'K\mathbb{f} = 0 \qquad (31) \end{aligned}$$

$$F_0 = \left.\begin{pmatrix} \overbrace{0\ 1 \quad\quad}^{n} & & \\ & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\} n \qquad (32)$$

$$\mathbb{x}_{h\lambda 0}:\ \mathring{\mathbb{x}}_{h\lambda 0} = A\mathbb{x}_{h\lambda 0} - \mathbb{f}\mathbb{a}'\mathring{\mathbb{x}} + \mathbb{B}u_{\lambda 0} \qquad (33)$$

$\mathbb{x}_{h\lambda 0}(0)$は，いろいろの論議があるが，ここでは一応 $\mathbb{x}_{h\lambda 0}(0) = 0$ とおいてよいことが結論される。

(29)と(33)を組合せれば，$\mathring{\mathbb{x}}$を入力としたシステムの出力として $\mathbb{x}_{h\lambda 0}, u_{\lambda 0}$ が得られる。

以上の計算は，いずれも線形演算となるため，計算がきわめて容易となる。

以上，各ステップについて説明を行なったが，これらあく

ずでも出力雑音・測定雑音を無視した上の話である。これを考慮することは，ステップ1，2いずれにおいても可能であるが，ステップ3では統計的検定が必要となる。これについては，著者の他論文(8)を参照されたい。

文献

1. Nicholson, H. ; Dynamic Optimization of a Boiler, Proc. IEE, 111-8 (1964) pp. 1479-1499
2. Aoki, M. ; Control of Large Scale Dynamic Systems by Aggregation, T. IEEE, AC-13-3, (1968) pp. 246-253
3. Kokotović, P. and Sannuti, P. ; Singular Perturbation Method for Reducing the Model Order in Optimal Control Design, T. IEEE, AC-13-4 (1968)
4. Kokotović, P. and Sannuti, P. ; An Approximate Design of Optimal Regulators for Higher-order Linear Plants, IFAC Symposium on System Sensitivity and Adaptability (1968)
5. Kokotović, P. et al. ; ε-coupling Method for near-optimum Design of Large Scale Linear Systems, Proc. IEE, 116-5 (1969)
6. 石谷；東京大学博士論文（工・電気）昭44.
7. 椹木他；階数を変化させるパラメータをもつ系の最適制御，制御工学，13-3 (1969)

8. Kaya, Y. and Ishikawa, M.; Test of Goodness of Fit of A State Equation Model, 1971 IFAC Kyoto Symposium (to be published)